

НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ГИПЕРУПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ПОЛИЛИНЕЙНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ОБОЛОЧКИ СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Аннотация. Предлагается алгоритм решения задачи о больших деформациях гиперупругих оболочек средней толщины с использованием метода конечных элементов. Базовым является тензор деформаций Альманси. Используется физическая модель материала Сетха. Решена тестовая задача.

Ключевые слова: оболочечный конечный элемент, гиперупругие деформации, метрический тензор, тензор Альманси, метод двойной аппроксимации.

Abstract. The algorithm of the solving of a problem about the large deformations of hyperelastic shells of average thickness with use of a finite elements method is offered. Base is tensor deformations Almansi. The physical model of material of Seth is used. The test problem is solved.

Keywords: shell finite element, hyperelastic strains, metric tensor, tensor of Almansi, method of double approximation.

Введение

В последнее время все чаще исследуют нелинейные задачи теории упругости, в частности задачи теории пластин и оболочек. Работы прошлых десятилетий по данному направлению были резюмированы в [1–3]. Было предложено большое количество методик, в частности теория, численные модификации и обобщения вырожденного оболочечного элемента представлены в [1–4], применение метода сокращенного интегрирования отмечено в работах [1–3, 5] и т.д.

В первой части данной статьи представлены определяющие кинематические соотношения в нелинейной постановке нового восьми-узлового полилинейного изопараметрического конечного элемента (КЭ), где в качестве степеней свободы в рассматриваемом КЭ фигурируют узловые степени свободы на лицевых поверхностях. Определяются ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора, тензоров деформаций (Коши – Грина и Альманси) и истинных напряжений Коши в исходном и текущем состоянии. Используется метод двойной аппроксимации по точкам суперсходимости для устранения «ложных деформаций» поперечного сдвига. Идеино близкие методики были предложены в [1–14].

Вторая часть посвящена использованию вариационного уравнения в скоростях напряжений в актуальной конфигурации. Вывод данного вариационного уравнения описан в [15] и в многочисленных журнальных публикациях. Был рассмотрен материал Сетха, где в качестве тензора конечных деформаций используется тензор деформаций Альманси. Описание этого материала представлено в [16, 17]. Проведена линеаризация данного вариационного уравнения, дискретизация полученных соотношений (матрицы жесткости, матрицы геометрической жесткости). Полученные выражения записываются в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

В третьей части рассматривается тестовая задача изгиба балки в кольцо. Данная задача сначала решается аналитически, исходя из кинематических и

физических соотношений. Далее на данной тестовой задаче апробируется методика, предложенная в предыдущих главах. Приведенный числовой пример демонстрирует возможность настоящей методики в решении нелинейных задач теории оболочек.

1. Определяющие соотношения

Определим исходную конфигурацию

$$X^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{t=1}^8 X_t^i N_t(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad (1)$$

где $N_t(\xi^j) = \frac{1}{8} (1 + \xi_t^1 \xi^1) (1 + \xi_t^2 \xi^2) (1 + \xi_t^3 \xi^3)$ – функция формы, $-1 \leq \xi^1, \xi^2, \xi^3 \leq 1$

По аналогии с [7] получаем

$$\bar{R}_j = \frac{\partial X^i}{\partial \xi^j} \bar{e}_i = R_j^i \bar{e}_i; \quad (2)$$

$$\bar{R}^j = \frac{\partial \xi^j}{\partial X^i} \bar{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{G}} \epsilon^{jmn} \bar{R}_m \times \bar{R}_n = R^{j,i} \bar{e}_i, \quad (3)$$

где ϵ^{kmn} – символы Леви – Чевита;

$$\sqrt{G} = \bar{R}_1 \cdot [\bar{R}_2 \times \bar{R}_3]; \quad (4)$$

метрический тензор:

$$(G) = G_{ij} (\bar{R}^i \bar{R}^j) = G^{ij} (\bar{R}_i \bar{R}_j) \quad (5)$$

Текущую конфигурацию на k -м шаге нагружения определим в аналогичном виде:

$${}^k \bar{r} = {}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) \bar{e}_i, \quad (6)$$

где

$${}^k x^i (\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \sum_{r=1}^8 {}^k x_r^i N_r(\xi^1, \xi^2, \xi^3). \quad (7)$$

Соответственно вычисляем

$${}^k \bar{r}_j = \frac{\partial {}^k x^i}{\partial \xi^j} \bar{e}_i, \quad (8)$$

$${}^k \bar{r}^j = \frac{\partial {}^k \xi^j}{\partial x^i} \bar{e}_i = \frac{1}{2\sqrt{{}^k g}} \epsilon^{jmn} {}^k \bar{r}_m \times {}^k \bar{r}_n = {}^k r^{j,i} \bar{e}_i; \quad (9)$$

метрический тензор:

$$\left({}^k g \right) = {}^k g_{ij} \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right) = {}^k g^{ij} \left({}^k \vec{r}_i {}^k \vec{r}_j \right), \quad (10)$$

где

$${}^k g_{ij} = {}^k \vec{r}_i \cdot {}^k \vec{r}_j = \sum_m \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j}. \quad (11)$$

Если ввести в рассмотрение ковариантные компоненты, то тензор деформации Альманси записывается следующим образом:

$${}^k Z_{ij} = \frac{1}{2} \left({}^k g_{ij} - G_{ij} \right) = \frac{1}{2} \sum_m \left(\frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} - \frac{\partial X^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial X^m}{\partial \xi^j} \right). \quad (12)$$

Так как компоненты тензоров деформаций Коши – Грина и Альманси в криволинейных базисах совпадают между собой, получаем тензор деформаций Коши – Грина

$$\left({}^k E \right) = {}^k Z_{ij} \left({}^k \vec{R}^i {}^k \vec{R}^j \right) \quad (13)$$

и тензор деформаций Альманси

$$\left({}^k A \right) = {}^k Z_{ij} \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right). \quad (14)$$

Введем в рассмотрение вектор приращения перемещений:

$$\Delta {}^k \vec{U} = {}^{k+1} \vec{r} - {}^k \vec{r} = \Delta U^i \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3 \right) \vec{e}_i, \quad (15)$$

где используются аппроксимации типа (1), (7), т.е.

$$\Delta {}^k U^i \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3 \right) = \sum_n \Delta {}^k U_n^i N_n \left(\xi^1, \xi^2, \xi^3 \right). \quad (16)$$

Аналог тензора пространственного градиента скорости

$$\left(\Delta {}^k h_R \right) = \left({}^k \Delta \vec{U}_i {}^k \vec{r}^i \right) \quad (17)$$

будет представлен в виде

$$\begin{aligned} \left(\Delta {}^k h_R \right) &= \left(\frac{\partial \Delta {}^k \vec{U}}{\partial \xi^i} {}^k \vec{r}^i \right) = \sum_m \frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} \left({}^k \vec{r}^j {}^k \vec{r}^i \right) = \\ &= \sum_m \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^j} \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right) = \Delta {}^k \alpha_{ij} \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Симметричная часть этого тензора имеет вид

$$\left(\Delta {}^k d_R \right) = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial {}^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \Delta {}^k U^m}{\partial \xi^j} \right] \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right) = \Delta {}^k Z_{ij} \left({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j \right). \quad (19)$$

Аналогично можем записать вариации. Имеем

$$(\delta^k d_R) = \frac{1}{2} \sum_m \left[\frac{\partial \delta U^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^j} + \frac{\partial^k x^m}{\partial \xi^i} \frac{\partial \delta U^m}{\partial \xi^j} \right] ({}^k \bar{r}^i {}^k \bar{r}^j) = \delta^k Z_{ij} ({}^k \bar{r}^i {}^k \bar{r}^j). \quad (20)$$

Здесь имеют место соотношения

$$\Delta^k \bar{Z}_{ij} = \frac{1}{2} [\Delta^k \alpha_{ij} + \Delta^k \alpha_{ji}], \quad (21)$$

$$\delta^k Z_{ij} = \frac{1}{2} [\delta^k \alpha_{ij} + \delta^k \alpha_{ji}].$$

Тензор истинных напряжений Коши определяется в виде

$$({}^k \sigma) = {}^k \sigma_{ij} ({}^k \bar{r}^i {}^k \bar{r}^j) = {}^k \sigma^{ij} ({}^k \bar{r}_i {}^k \bar{r}_j),$$

где введены ковариантные и контравариантные компоненты тензора напряжений.

2. Алгоритм расчета

Запишем известное вариационное уравнение в скоростях напряжений [6] без учета массовых сил. Это уравнение будет иметь вид

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ ({}^k \dot{\sigma}) \cdot (\delta^k d) + \left[\frac{\partial^k \mathbf{v}^i}{\partial^k x^i} \right] ({}^k \sigma) \cdot (\delta^k d) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} ({}^k \sigma) \cdot \left[(\delta^k h) \cdot ({}^k h) + ({}^k h)^T \cdot (\delta^k h)^T \right] \right\} dV_k = \\ & = \int_{S_k^\sigma} {}^k \dot{t}_n^* \cdot \delta \bar{U} dS_k - \left\{ \int_{V_k} [({}^k \sigma) \cdot (\delta^k d)] dV_k - \int_{S_k^\sigma} \bar{t}_n^* \delta \bar{U} dS \right\}. \quad (22) \end{aligned}$$

Теперь сделаем переход от $({}^k \dot{\sigma})$ и ${}^k \dot{t}_n^*$ к приращениям $(\Delta^k \sigma)$ и $\Delta^k \bar{t}_n^*$.

Получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} & \int_{V_k} \left\{ (\Delta^k \sigma) \cdot (\delta^k d_R) + \left[\frac{\partial^k \Delta U^i}{\partial^k x^i} \right] ({}^k \sigma) \cdot (\delta^k d_R) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} ({}^k \sigma) \cdot \left[(\delta^k h_R) \cdot (\Delta^k h_R) + (\Delta^k h_R)^T \cdot (\delta^k h_R)^T \right] \right\} dV_k = \\ & = \int_{S_k^\sigma} \Delta^k \bar{t}_n^* \cdot \delta \bar{U} dS_k - \left\{ \int_{V_k} [({}^k \sigma) \cdot (\delta^k d_R)] dV_k - \int_{S_k^\sigma} \bar{t}_n^* \cdot \delta \bar{U} dS \right\}. \quad (23) \end{aligned}$$

В качестве физической модели используем материал Сетха, для которого справедлив закон Гука для тензора деформаций Альманси [16, 17]:

$$(\sigma) = 2\mu(A) + \lambda(g)I_{1A}. \quad (24)$$

Распишем для приращений напряжений k -го состояния:

$$(\Delta^k \sigma) = 2\mu(\Delta^k A) + \lambda({}^k g) \left[({}^k g) \cdot (\Delta^k A) \right], \quad (25)$$

где $(\Delta^k A) = (\Delta^k d_R) - (\Delta^k h_R)^T \cdot ({}^k A) - ({}^k A) \cdot (\Delta^k h_R)$, либо в дискретном случае, используя (18), (19), можно написать в виде

$$(\Delta^k A) = {}^k Z_{ij} ({}^k \vec{r}^i {}^k \vec{r}^j) - \Delta^k \alpha_{ki} {}^k A_{kj} - {}^k A_{ik} \Delta^k \alpha_{kj}. \quad (26)$$

Распишем первое слагаемое (25):

$$(\Delta^k \sigma^1) = 2\mu(\Delta^k A) = 2\mu \left((\Delta^k d_R) - (\Delta^k h_R)^T \cdot ({}^k A) - ({}^k A) \cdot (\Delta^k h_R) \right). \quad (27)$$

Используя (14), (18) и (19), запишем (28) в виде

$$\Delta^k \sigma_{ij}^1 = 2\mu \left(\Delta^k Z_{ij} - \Delta^k \alpha_{ki} {}^k A_{kj} - {}^k A_{ik} \Delta^k \alpha_{kj} \right). \quad (28)$$

Учитывая, что

$$({}^k g) \cdot (\Delta^k A) = \sum_{i,j} {}^k g^{ij} \left(\Delta^k Z_{ij} - \Delta^k \alpha_{ki} {}^k A_{kj} - {}^k A_{ik} \Delta^k \alpha_{kj} \right), \quad (29)$$

распишем второе слагаемое (25):

$${}^k \Delta \sigma_{ij}^2 = \lambda \delta_{ij} \sum_{l,n} {}^k g^{ln} \left(\Delta^k Z_{ln} - \Delta^k \alpha_{kl} {}^k A_{kn} - {}^k A_{lk} \Delta^k \alpha_{kn} \right), \quad (30)$$

где

$$\Delta^k Z_{ij} = \sum_m \Delta^k U_r^m {}^k E_{ij}^{rm}; \quad (31)$$

$${}^k E_{ij}^{rm} = \frac{1}{2} {}^k x_t^m \left(\frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^j} + \frac{\partial N_t}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \right). \quad (32)$$

С технологией введения метода двойных аппроксимаций для использованного в настоящей работе КЭ можно ознакомиться в работе [7].

Если ввести обозначения

$${}^k A_{ij}^{rm} = \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \sum_t {}^k x_t^m \frac{\partial N_t}{\partial \xi^i} = \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} r_m^i, \quad (33)$$

то (32) можно записать в виде

$${}^k E_{ij}^{rm} = \frac{1}{2} \left[{}^k A_{ij}^{rm} + {}^k A_{ji}^{rm} \right]. \quad (34)$$

Запишем второе слагаемое вариационного уравнения (23). Оно представлено в виде

$$-\frac{1}{2} \left({}^k \sigma \right) \cdot \left[\left(\delta^k h_R \right) \cdot \left(\Delta^k h_R \right) + \left(\Delta^k h_R \right)^T \cdot \left(\delta^k h_R \right)^T \right], \quad (35)$$

где

$$\left({}^k \sigma \right) = {}^k \sigma_{ij} \left({}^k \bar{r}^i {}^k \bar{r}^j \right), \quad {}^k \sigma_{ij} = \lambda^k g_{ij} {}^k I_{1A} + 2\mu^k A_{ij}, \quad {}^k I_{1A} = {}^k g^{ij} {}^k A_{ij}. \quad (36)$$

Распишем квадратную скобку в (35):

$$\begin{aligned} & \left[\left(\delta^k h_R \right) \cdot \left(\Delta^k h_R \right) + \left(\Delta^k h_R \right)^T \cdot \left(\delta^k h_R \right)^T \right] = \\ & = \left[\delta^k \alpha_{im} \Delta^k \alpha_{nj} {}^k g^{mn} + \Delta^k \alpha_{mi} \delta^k \alpha_{jn} {}^k g^{nm} \right] = \\ & = \sum_{s,p} \left[\frac{\partial \delta^k U^s}{\partial \xi^i} \frac{\partial {}^k x^s}{\partial \xi^m} \frac{\partial \Delta^k U^p}{\partial \xi^n} \frac{\partial {}^k x^p}{\partial \xi^j} {}^k g^{mn} + \frac{\partial \Delta^k U^p}{\partial \xi^m} \frac{\partial {}^k x^p}{\partial \xi^i} \frac{\partial \delta^k U^s}{\partial \xi^j} \frac{\partial {}^k x^s}{\partial \xi^n} {}^k g^{nm} \right] = \\ & = \sum_{s,p} \left[\delta^k U_r^s {}^k x_t^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^m} \Delta^k U_q^p {}^k x_z^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^n} \frac{\partial N_z}{\partial \xi^j} {}^k g^{mn} + \right. \\ & \quad \left. + \Delta^k U_q^p {}^k x_z^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^m} \frac{\partial N_z}{\partial \xi^i} \delta^k U_r^s {}^k x_t^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^n} {}^k g^{nm} \right] = \\ & = \sum_{s,p} \left[\Delta^k U_q^p \delta^k U_r^s \left({}^k x_t^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^m} {}^k x_z^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^n} \frac{\partial N_z}{\partial \xi^j} {}^k g^{mn} + \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + {}^k x_z^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^m} \frac{\partial N_z}{\partial \xi^i} {}^k x_t^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} \frac{\partial N_t}{\partial \xi^n} {}^k g^{nm} \right) \right] = \\ & = \sum_{s,p} \left[\Delta^k U_q^p \delta^k U_r^s \left({}^k r_m^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^i} {}^k r_j^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^n} {}^k g^{mn} + {}^k r_i^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^m} {}^k r_n^s \frac{\partial N_r}{\partial \xi^j} {}^k g^{nm} \right) \right] = \\ & = \sum_{s,p} \left[\Delta^k U_q^p \delta^k U_r^s \left({}^k A_{mi}^{rs} {}^k A_{jn}^{qp} {}^k g^{mn} + {}^k A_{im}^{qp} {}^k A_{nj}^{rs} {}^k g^{nm} \right) \right]. \quad (37) \end{aligned}$$

В результате матрица геометрической жесткости второго слагаемого запишется в виде

$$\hat{D}_{ps}^{qr} = -\frac{1}{2} {}^k \sigma^{ij} \left[{}^k A_{mi}^{rs} {}^k A_{jn}^{qp} {}^k g^{mn} + {}^k A_{im}^{qp} {}^k A_{nj}^{rs} {}^k g^{nm} \right] \sqrt{g}. \quad (38)$$

Запишем третье слагаемое вариационного уравнения (23):

$$\sum_i \frac{\partial \Delta^k U^l}{\partial {}^k x^l} \left[{}^k (\sigma) \cdot \left(\delta^k d \right) \right] = \sum_l \Delta^k \alpha_{ll} {}^k \sigma_{im} \delta^k Z_{nj} {}^k g^{mn} {}^k g^{ij} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_l \Delta^k \alpha_{ll}^k \sigma_{im}^k \frac{1}{2} \left(\delta^k \alpha_{nj} + \delta^k \alpha_{jn} \right)^k g^{mn k} g^{ij} = \\
&= \sum_l \frac{\partial \Delta^k U^p}{\partial \xi^l} \frac{\partial^k x^p}{\partial \xi^l} \sigma_{im}^k E_{nj}^{rs} \delta^k U_r^s g^{mn k} g^{ij} = \\
&= \sum_l \Delta^k U_q^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^l} x_z^p \frac{\partial N_z}{\partial \xi^l} \sigma_{im}^k E_{nj}^{rs} \delta^k U_r^s g^{mn k} g^{ij} = \\
&= \sum_l \Delta^k U_q^p r_l^p \frac{\partial N_q}{\partial \xi^l} \sigma_{im}^k E_{nj}^{rs} \delta^k U_r^s g^{mn k} g^{ij} = \\
&= \sum_l \Delta^k U_q^p \delta^k U_r^s A_{ll}^{qp k} \sigma_{im}^k E_{nj}^{rs} g^{mn k} g^{ij}. \quad (39)
\end{aligned}$$

Тогда матрица геометрической жесткости третьего слагаемого запишется в виде

$$\tilde{D}_{ps}^{qr} = \sigma_{im}^k A_{ll}^{qp k} E_{nj}^{rs} g^{mn k} g^{ij} \sqrt{g}. \quad (40)$$

В результате описанной конечно-элементной дискретизации получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\left[{}^l K \right] \left\{ \Delta^l u \right\} = \left\{ \Delta^l P \right\} - \left\{ {}^l H \right\}, \quad (41)$$

где $\left\{ \Delta^l u \right\}$ – вектор приращения узловых перемещений; $\left[{}^l K \right]$ – матрица левых частей, $\left\{ \Delta^l P \right\}$ – вектор приращения узловых сил; $\left\{ {}^l H \right\}$ – вектор невязки.

Решая систему линейных алгебраических уравнений (41) и определяя приращения перемещений, находим $(l+1)$ конфигурацию

$${}^{l+1} y^i = {}^l y^i + \Delta^l u^i \quad (42)$$

и напряжения

$${}^{k+1} \sigma = {}^k \sigma + \Delta^k \sigma. \quad (43)$$

3. Тестовая задача

Рассматривается тестовая задача изгиба балки в кольцо (рис. 1).

Рассмотрим радиус-вектор начальной конфигурации:

$$\vec{R} = \alpha \vec{e}_1 + \gamma \vec{e}_2 + \beta \vec{e}_3, \quad (44)$$

где $0 \leq \alpha \leq L$, $0 \leq \gamma \leq b$, $-\frac{h}{2} \leq \beta \leq \frac{h}{2}$.

Для деформированной конфигурации (рис. 2) справедливо

$$\vec{r} = \alpha [\sin \varphi \vec{e}_1 + (1 - \cos \varphi) \vec{e}_3] + \gamma \vec{e}_2 + \beta [-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_3]. \quad (45)$$

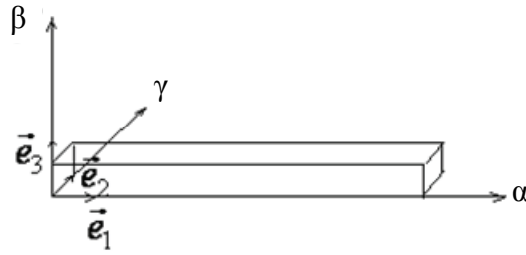


Рис. 1

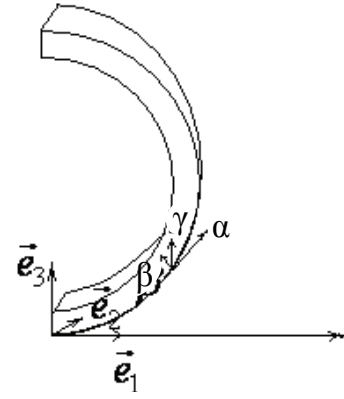


Рис. 2

После очевидных преобразований получим ковариантные и контравариантные компоненты метрического тензора:

$$g_{11} = \left(1 - \frac{\pi}{L}\beta\right)^2; g_{22} = g_{33} = 1; g_{ij} = 0, i \neq j;$$

$$g^{11} = \left(1 - \frac{\pi}{L}\beta\right)^{-2}; g^{22} = g^{33} = 1; g^{ij} = 0, i \neq j.$$

Тогда тензор Альманси будет иметь вид

$$\begin{aligned} A_{11} &= \frac{1}{2}[g_{11} - G_{11}] = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{\pi}{L}\beta\right)^2 - 1\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left[1 - 2\frac{\pi}{L}\beta + \left(\frac{\pi}{L}\beta\right)^2 - 1\right] = \frac{\pi}{L}\beta\left(-1 + \frac{\pi}{2L}\beta\right). \end{aligned}$$

Остальные $A_{ij} = 0$.

Для рассматриваемого материала Сетха справедливы соотношения (36):

$$\sigma_{11} = \lambda g_{11} A_{11} + 2\mu A_{ij};$$

$$I_{1A} = g^{ij} A_{ij};$$

тогда

$$\sigma_{11} = \lambda g_{11} A_{11} + 2\mu A_{11} = A_{11} [2\mu + \lambda g_{11}] = \frac{\pi}{L}\beta \left(\frac{\pi}{L}\beta - 1\right) \left[2\mu + \lambda \left(1 - \frac{\pi}{L}\beta\right)^2\right].$$

Вычислим $\sigma_{11}^{\min}$ и $\sigma_{11}^{\max}$ в узлах на свободном краю балки:

$$\sigma_{11}^{\min} = \frac{\pi h}{2L} \left(\frac{\pi h}{4L} - 1\right) \left[2\mu + \lambda \left(1 - \frac{\pi h}{2L}\right)^2\right];$$

$$\sigma_{11}^{\max} = \frac{\pi h}{2L} \left(\frac{\pi h}{4L} + 1 \right) \left[2\mu + \lambda \left(1 + \frac{\pi h}{2L} \right)^2 \right];$$

Для геометрии оболочки учтем $\frac{\pi h}{4L} \ll 1$, тогда

$$\sigma_{11}^{\min} = -\frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu); \quad \sigma_{11}^{\max} = \frac{\pi h}{2L} (\lambda + 2\mu);$$

$$\sigma_{22} = \lambda g_{22} A_{11} + 2\mu A_{22} = \lambda A_{11} = \lambda \frac{\pi \beta}{L} \left(-1 + \frac{\pi \beta}{2L} \right);$$

$$\sigma_{33} = \lambda g_{33} A_{11} + 2\mu A_{33} = \lambda A_{11} \text{ (с учетом } \sigma_{33} = 0 \text{)}.$$

Задача рассчитана с использованием предложенной выше методики. Длина балки $L = 200$ см, высота $h = 1$ см, ширина $b = 5$ см, модуль упругости

$E = 20000 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0$. На рис. 3,а приведена балка

при 100 шагах нагружения, на рис. 3,б – при 300 шагах нагружения, на рис. 3,в – при 500 шагах нагружения, на рис. 3,г – при 1000 шагах нагружения. На рис. 4 изображено деформированное состояние балки и несколько промежуточных этапов нагружения.

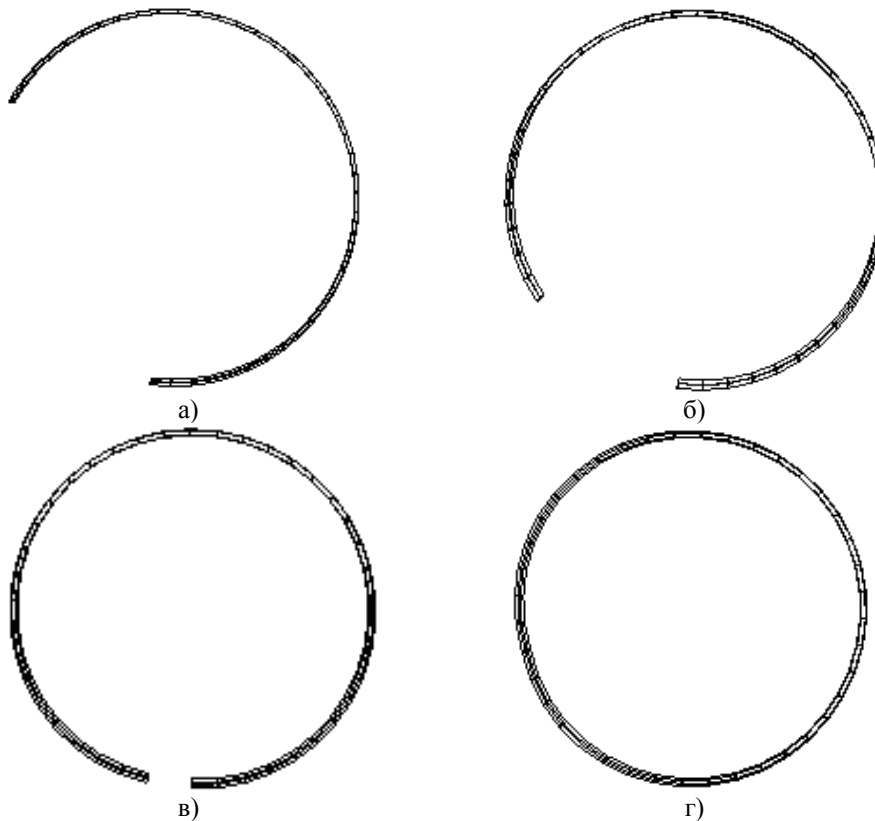


Рис. 3

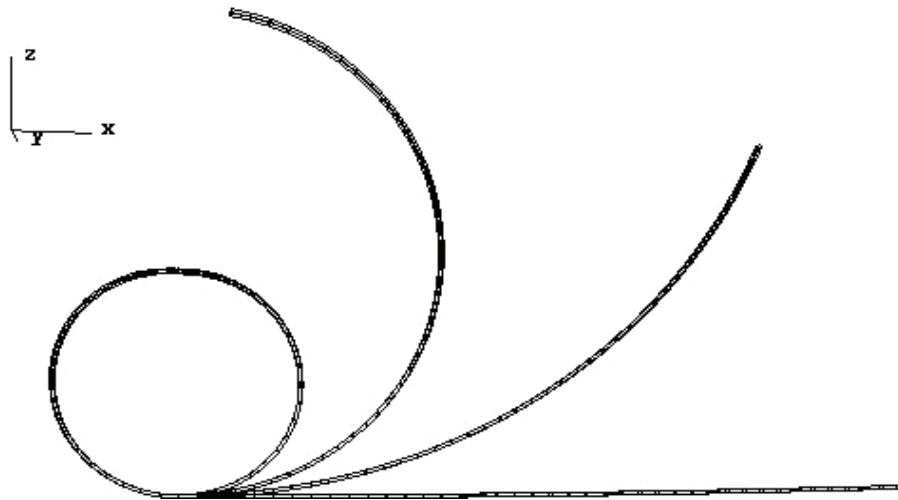


Рис. 4

Заключение

Предложенная в настоящей работе методика построения трехмерного восьми-узлового изопараметрического КЭ нелинейной теории упругости, использование материала Сетха позволяет получить специальный КЭ, при помощи которого вполне реально рассчитывать оболочки средней толщины с использованием однослойной аппроксимации по толщине. Приведенный числовой пример демонстрирует работоспособность предложенной методики.

Список литературы

1. Голованов, А. И. Современные конечно-элементные модели и методы исследования тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, А. В. Песошин, О. Н. Тюленева. – Казань : КГУ, 2005. – 442 с.
2. Голованов, А. И. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, О. Н. Тюленева, А. Ф. Шигабутдинов. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
3. Yang, H. T. Y. A survey of recent shell finite elements / H. T. Y. Yang, S. Saigal, A. Masud, R. K. Kapania // Int. J. for numerical methods in engineering. – 2000. – V. 47. – P. 101–127.
4. Ahmad, S. Analysis of thick and shell structures by curved finite element / S. Ahmad, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 1990. – V. 2. – P. 419–459.
5. Hughes, T. J. R. Reduced and selective integration techniques in finite element analysis of plates / T. J. R. Hughes, M. Cohen, M. Haroun // Nuclear Engineering and Design. – 1978. – V. 46. – P. 203–222.
6. Голованов, А. И. Трехмерный конечный элемент для расчета тонкостенных конструкций / А. И. Голованов, М. К. Сагдатуллин // Ученые записки Казанского государственного университета. – 2009. – Т. 151. – Кн. 3. – С. 121–129. – (Физико-математические науки).
7. Сахаров, А. С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский [и др.]. – Киев : Вища школа, 1982. – 480 с.
8. Бережной, Д. В. Искривленный конечный элемент пластин и оболочек средней толщины с учетом обжатия / Д. В. Бережной // Труды XVII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань : Изд-во КГУ, 1996. – Т. 2. – С. 94–99.

9. **Гуриелидзе, М. Г.** Расчет толстостенных оболочек с учетом больших деформаций / М. Г. Гуриелидзе, А. И. Голованов // Труды XVII междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Казань : Изд-во КГУ, 1996. – Т. 2. – С. 118–123.
10. **Голованов, А. И.** Пошаговая постановка решения геометрически нелинейной задачи МКЭ / А. И. Голованов, М. Г. Гуриелидзе // Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред. – М., 1998. – С. 82–87.
11. **Баженов, В. А.** Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды / В. А. Баженов, А. С. Сахаров, В. К. Цыхановский // Прикладная механика. – 2002. – Т. 38. – № 6. – С. 24–63.
12. **Kara, N.** Three-dimensional finite element for thick shells of general shape / N. Kara, N. Kumbasar // Int. J. for Physical and Engineering Science. – 2001. – V. 52. – P. 1–7.
13. **Alves de Sousa R. J.** A new one-point quadrature enhanced assumed strain (EAS) solid – shell element with multiple integration points along thickness: Part I – geometrically linear applications / Ricardo J. Alves de Sousa, Rui P. R. Cardoso, Robertt A. Fontes Valente [et al.] // Int. J. for numerical methods in engineering. – 2005. – V. 62. – P. 952–977.
14. **Sze, K. Y.** Three – dimensional continuum finite element models for plate/shell analysis / K. Y. Sze // Prog. Struct. Engng Mater. – 2002. – V. 4. – P. 400–407.
15. **Голованов, А. И.** Математические модели вычислительной нелинейной механики деформируемых сред / А. И. Голованов, Л. У. Султанов. – Казань : Изд-во Казан. гос. ун-та, 2009. – 465 с.
16. **Лурье, А. И.** Нелинейная теория упругости / А. И. Лурье. – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 512 с.
17. **Новожилов, В. В.** Основы нелинейной теории упругости / В. В. Новожилов. – М. : ОГИЗ. Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948. – 212 с.

Голованов Александр Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор, Казанский федеральный
университет

E-mail: Alexandr.Golovanov@ksu.ru

Golovanov Alexander Ivanovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor,
Kazan Federal University

Сагдатуллин Марат Камилевич

аспирант, Казанский
федеральный университет

E-mail: marat1@hitv.ru

Sagdatullin Marat Kamilevich

Postgraduate student,
Kazan Federal University

УДК 539.3

Голованов, А. И.

Нелинейная задача о гиперупругом деформировании полилинейного конечного элемента оболочки средней толщины / А. И. Голованов, М. К. Сагдатуллин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 4 (16). – С. 39–49.